EXERCICE N°1 : 40' 5 points

1) Etablir que $\forall\ x \geq 0,\ \ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Où $n \in \mathbb{N}$.

2) a) En déduire de 1) que : $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

b) Prouver que $\forall\ x \geq 0,\ \frac{x^3}{3(1+x)} \leq \int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt \leq \frac{x^3}{3}$. En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

3) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

a) Prouver que f est continue, dérivable sur $[0, +\infty[$.

b) Ecrire l'équation de la tangente Δ à ζ_f au point A d'abscisse 0 et prouver que ζ_f est au-dessus de Δ

4) Etudier les variations de f et tracer ζ_f.

EXERCICE N°2 : 25' 6 points

1) Montrer que pour $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

b) Déduire un encadrement de u_n puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

3) Montrer que pour $t \geq 0$, on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$. Déduire que pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n^n}{n!}$.

a) Montrer que $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

c) Déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \frac{1}{2} u_n \leq \ln(v_{n+1}) \leq n$. Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n} = 1$.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \frac{\ln(v_n)}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.